

Leçon :

Fonctions logarithmes

2ème BAC Pro
2019 - 2020

Prof: YAZOUGH
MOHAMED

1er Partie : logarithme népérien

① Définition :

La fonction logarithme népérien, notée \ln , est la primitive de la fonction : $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur

$]0; +\infty[$ qui s'annule en 1

→ Autrement dit :

• \ln définie et continue sur $]0; +\infty[$

• \ln est dérivable sur $]0; +\infty[$ et :

$$\forall x > 0 \quad \ln'(x) = \frac{1}{x}$$

• $\ln(1) = 0$

② Propriété fondamentale :

$$\forall (a > 0)(b > 0); \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

③ Conséquence : $(\forall a > 0)(\forall b > 0);$

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

$$(\forall r \in \mathbb{Q}); \ln(a^r) = r \ln(a)$$

④ Remarque : on a pour tout $r \in \mathbb{Q}$

$$\text{et } x > 0 : \sqrt[r]{x} = x^{\frac{1}{r}}$$

par exple: $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}; \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

→ Donc: $\ln(\sqrt[3]{x}) = \ln(x^{\frac{1}{3}}) = \frac{1}{3} \ln(x)$

et: $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \ln(x)$

Ex: 1/ Sachant que : $\begin{cases} \ln(2) \approx 0,7 \\ \ln(3) \approx 1,1 \end{cases}$
calculer : $\ln\left(\frac{8}{12}\right)$ et $\ln(72)$

E: 2/ Simplifier les expressions :

$$A = \ln(a^8) + \ln(a^4) - \ln\left(\frac{1}{a^8}\right) \quad (a > 0)$$

$$B = \ln(ab) + \ln\left(\frac{a}{b}\right) - \ln(a^2); \quad (a > 0; b > 0)$$

Ex: 3/ Déterminer le domaine de déf de :

① $f(x) = \ln(x-8);$

② $g(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$

③ $h(x) = x^3 - \frac{1}{x} \ln(x^2+1)$

⑤ Limites aux bornes de D_{\ln} :

$$\lim_{x \rightarrow 0} (-\ln x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-\ln x) = -\infty$$

⑥ Tableau de variation de \ln :

\ln est dérivable sur $]0; +\infty[$

$$\forall x > 0 \quad \ln'(x) = \frac{1}{x} > 0 \text{ donc}$$

\ln est str \nearrow sur $]0; +\infty[$

ainsi :

x	0	1	$+\infty$
$\ln'(x) = \frac{1}{x}$		+	
\ln	$-\infty$	0	$+\infty$

⑦ Le nombre népérien : e

e est le nombre réel qui vérifie :

$$\ln(e) = 1 \text{ et on a : } e \approx 2,7$$

⑧ Propriétés algébriques:Comme \ln est str \nearrow ; alors:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\forall a > 0) (\forall b > 0) \text{ on a:} \\ \ln(a) = \ln(b) \iff a = b \\ \ln(a) > \ln(b) \iff a > b \\ \ln(a) < \ln(b) \iff a < b \end{array} \right\}$$

EX: 4 | Résoudre dans \mathbb{R} :

1°/ $\ln(x) = 1$ 2°/ $\ln x = 7$

3°/ $\ln(x^2) = \ln(6x - 5)$

4°/ $\ln(x-1) = \ln(2x+3)$

EX: 5 | Résoudre dans \mathbb{R} :

1°/ $\ln(-x+4) < \ln(x)$

2°/ $\ln(x+2) + \ln(x-5) < 3\ln(2)$

3°/ $\ln(-2x+3) < 2\ln(x)$

EX: 6 | Résoudre dans \mathbb{R}

$\ln^2(x) - 2\ln(x) + 1 = 0$

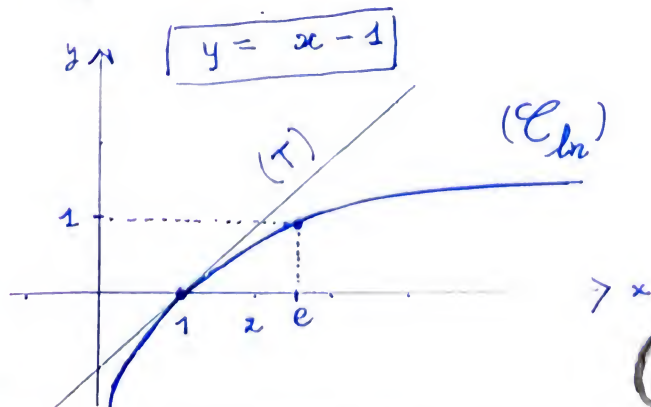
$\ln^2(x) = \ln(x)$

⑨ Représentation graphique:

prop: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

L'éq de la tangente au pt: $(1, 0)$:

T: $y = \ln'(1)(x-1) + \ln(1)$

⑩ Limites à retenir:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

EX: 7 | Calculer les limites:

1 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 5 \ln x)$

2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \ln x)$

3 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln(x^2) - \ln x)$

4 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\ln(x^4)}{x-1} \right)$

5 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln(x+1) + \ln x)$

6 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln x \right)$

⑪ Dérivée logarithmique d'1 fct:

Si u est une fct dérivable et strictement positive sur un intervalle I
 La fct $\ln u$ est dérivable sur I
 et $\forall x \in I \quad \ln'(u(x)) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

EX: 8 | calculer les dérivées de:

1°/ $\ln(x^2+5)$ $I = \mathbb{R}$

2°/ $\ln(x^3+x)$; $I =]0, +\infty[$

3°/ $\ln(x^2-4)$; $I =]2, +\infty[$

4°/ $\ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)$; $I =]-\infty, -2[$

Fonctions logarithmes :

2^{ème} Partie - 2^{ème} Bac Pro

(12) La fct logarithme de base a
(avec $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$)

Déf : c'est la fct notée : \log_a

tg : $\forall x \in]0; +\infty[; \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$

★ Cas particulier :

la fct \log_{10} est la fct logarithme décimal et on la note : \log .

Propriétés : • $\log_a(1) = 0 ; \log_a(a) = 1$

• $\forall x > 0 \forall n \in \mathbb{Q} \log_a(x) = n \Leftrightarrow x = a^n$

• $\forall x > 0 \forall y > 0 \forall r \in \mathbb{R} :$

$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$

$\log_a(x^r) = r \log_a(x)$

$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$

$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$

(13) Limites et inégalités :

si $a > 1$ on a : $\forall (x; y) \in]0; +\infty[$

$\log_a(x) > \log_a(y) \Leftrightarrow x > y$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a(x) = -\infty$

si $0 < a < 1$

$\log_a(x) > \log_a(y) \Leftrightarrow x < y$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a(x) = +\infty$

(14) La dérivée :

$\forall x \in]0; +\infty[; (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln(a)}$

Exercices

Ex: 9

$f(x) = \ln(5 - 2x) + \ln(2)$

1) Donner D_f et calculer $f'(2)$.

2) Donner l'éq de la tangt au pt : $(2; f(2))$

Ex: 10 f déf sur $] -3; +\infty[$ par :

$f(x) = \ln(x+3) - x^2 + 1$

Donner l'éq de la tngt au pt $(-1; f(-1))$

Ex: 11 Etudier les variations de la fct f sur l'intervalle donné :

a) $f(x) = \ln(2x - 8) ; I =]4; +\infty[$

b) $f(x) = \ln(x+1) + \ln(x-1) ; I =]1; +\infty[$

c) $f(x) = x^2 - 4 + \ln(x-2) ; I =]2; +\infty[$

d) $f(x) = \frac{1}{x-4} + \ln(1-2x) ; I =]-\infty; \frac{1}{2}[$

Ex: 12 [A] $g(x) = x^3 - 1 + 2 \ln(x) ; x \in]0; +\infty[$

1) calculer $g'(x)$ et étudier son signe.

2) Dresser le tableau de variation de g .

3) Calculer $g(1)$ et donner le signe de $g(x) : (x \in]0; +\infty[)$

[B] $\forall x \in]0; +\infty[; f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x^2}$

1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f$

2) Mq: (D) : $y = x - 1$ est asymptote.

3) Mq: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

4) Dresser le tableau de var de f

5) Calculer les coordonnées du pt de l'intersection de (D) et (C_f) .

6) Trasser (C_f) . on donne : $\begin{matrix} OI = 3 \text{ cm} \\ OI' = 2 \text{ cm} \end{matrix}$